Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
3^{er} Examen Parcial (30 %)
Ene-Mar 2015

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (14 pts.) Para la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z(\cos z - 1)}{z^4(z-1)}$.
   (a) (6 pts.) Obtener las singularidades aisladas, clasificarlas y hallar los residuos en c/u de ellas.
   (b) (8 pts.) Obtener los tres primeros términos no nulos de la serie de Laurent centrada en $z = 0$, indicando además el conjunto de convergencia.

2. (13 pts.) Calcular el valor de

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+9}\,dx$$

3. (13 pts.) Calcular el valor de

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)}\,dz$$

   donde la curva de integración se toma en sentido positivo.

Pregunta 1 (14 puntos) Para la función

$$f(z) = \frac{senz(cosz - 1)}{z^4(z-1)}$$

a) (6 puntos) Obtener las singularidades aisladas, clasificarlas y hallar los residuos en c/u de ellas.
b) (8 puntos) Obtener los tres primeros términos no nulos de la serie de Laurent centrada en z = 0, indicando además el conjunto de convergencia.

Solución

Las singularidades de $f(z)$ son aquellos números que hacen que el denominador sea cero. Es decir, si $z^4(z-1) = 0$, entonces $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$ son las singularidades aisladas de nuestra función.

Ahora, debemos clasificar dichas singularidades y hallar sus residuos.

Para $z_1 = 1$

Veamos que es un **polo simple**. Ya que,

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{senz(cosz - 1)}{z^4(z-1)} = \frac{sen1(cos1 - 1)}{0} = \infty$$

Luego, el residuo se define como,

$$Res(f(z); z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left((z - z_k)^m f(z)\right)$$

Donde, m denota el orden del polo.
Así,

$$\boxed{Res(f(z); 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{senz(cosz - 1)}{z^4(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{senz(cosz - 1)}{z^4} = sen1(cos1 - 1)}$$

Para $z_0 = 0$

Por conveniencia en este ejercicio (y para mostrar otra forma de hallar el residuo de una singularidad aislada) hallaremos el residuo de z_0 desarrollando la serie de Laurent al rededor de z_0.

Aplicando fracciones simples tenemos que,

$$g(z) = \frac{1}{z^4(z-1)} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

Veamos que podemos escribir este último factor como una serie geométrica,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^n$$

Así,

$$g(z) = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^n = -\sum_{k=-4}^{\infty} z^n = \left(-\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 \cdots\right)$$

Por otro lado, haciendo la expasión en series de Taylor de las funciones *senz* y *cosz*. Tenemos que,

$$h(z) = senz(cosz - 1) = \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5!} \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \cdots - 1\right)$$

De manera que la serie de Laurent al rededor de $z_0 = 0$ es

$$f(z) = g(z)h(z) = \frac{senz(cosz - 1)}{z^4(z-1)} =$$

$$= \left(-\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 \cdots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots\right)\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \cdots\right)$$

Evidentemente, es imposible hallar la serie completa. Pero nos basta con hallar tres o cuatro términos (incluyendo el a_{-1} que es el residuo de $f(z)$ en z_0). Particularmente, en este ejercicio nos piden solamente los tres primeros términos no nulos. Así que,

$$h(z) = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots\right)\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \cdots\right) = \left(-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{4!} + \frac{z^5}{2(3!)} \cdots\right) = \left(-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{8} \cdots\right)$$

Luego,

$$g(z)h(z) = \left(-\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 \cdots\right)\left(-\frac{z^3}{2} + \frac{z^5}{8} \cdots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} \cdots - \frac{z}{8} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{8}\right) = \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{3z^2}{8} \cdots\right)$$

Donde, claramente los 3 primeros términos no nulos de la serie de Laurent son

$$\boxed{\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2} + \frac{3z}{8} \cdots\right)}$$

Además, $z_0 = 0$ es un **polo simple** (ya que el término de Laurent más pequeño es a_{-1}). Y, el residuo de $f(z)$ en z_0 es el número que acompaña al término $\frac{1}{z-z_0}$ de la serie de Laurent desarrollada al rededor de z_0. Tal que,

$$\boxed{Res(f(z); 0) = a_{-1} = \frac{1}{2}}$$

Pregunta 2 (13 puntos) Calcular el valor de

$$\int_0^\infty \frac{cosx}{x^2 + 9} dx$$

<u>Solución</u>

Como el integrando es par, sabemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{cosx}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cosx}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{cosx}{x^2+9}dx$$

Consideramos la función compleja $f(z) = g(z)e^{iz}$ tal que $Re[f(z)]$ modela a la función real $f(x)$ en el plano complejo. Es decir,

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$$

Tal que,

$$Re[f(z)] = \frac{cosz}{z^2+9}$$

Así, si consideramos como región de integración la semicircunferencia superior.

$$\int_{-R}^{R} \frac{cosx}{x^2+9}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res(f(z); z_k) - \int_{C_R} f(z)dz$$

Veamos que,

$$\int_{C_R} f(z)dz = 0$$

Ya que,

$$|g(z)| = |\frac{1}{z^2+9}| = \frac{1}{|z^2+9|} \leq \frac{1}{|z|^2+9} \leq \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{R^2}$$

Además, está acotada superiormente por $M_R \pi R$. Esto es,

$$|g(z)| \leq M_R\pi R = \frac{\pi R}{R^2} = \frac{\pi}{R}$$

Y cuando R $\to \infty$, la cota superior de $g(z)$ tiende a 0.

Por lo tanto,

$$\int_{-R}^{R} \frac{cosx}{x^2+9}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res(f(z); z_k)$$

Por defición, el teorema de los residuos establece que la integral compleja sobre una curva cerrada y simple es igual a $2\pi i$ multiplicado por la sumatoria de los residuos de las singularidades que están dentro de la curva.

En este caso, nuestra curva toma todos los valores que están en el semiplano superior del plano complejo.

Hallemos las singularidades de nuestra función compleja $f(z)$,

$$z^2 + 9 = (z + 3i)(z - 3i)$$

De las cuales solamente consideraremos $z_0 = 3i$ porque es la que está en el semiplano superior del plano complejo.
Vemos que z_0 es un **polo simple** ya que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{e^{iz}}{(z-z_0)(z-z_1)} = \infty$$

Por lo tanto,

<u>Para $z_0 = 3i$</u>

$$Res(f(z); 3i) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)} = \lim_{z\to 3i} \frac{e^{iz}}{(z+3i)} = \frac{e^{-3}}{6i}$$

<u>Observación:</u> Así como se vió en el primer ejercicio, existe otra forma de hallar el residuo de un polo z_k, así como el orden del mismo. Si desarrollamos la serie de Laurent al rededor de la singularidad z_k, podemos encontrar su orden si identificamos el número de términos que conforman la serie de Laurent (Ej. si la serie de Laurent tiene términos hasta el $\frac{a_{-3}}{(z-z_k)^3}$, entonces el polo será de orden 3). Mientras que el valor a_{-1} de la expresión $\frac{a_{-1}}{(z-z_k)}$ será el residuo de dicho polo.

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{cosx}{x^2+9}dx = Re\left[\frac{1}{2}\left(2\pi i\frac{e^{-3}}{6i}\right)\right] = Re\left[\frac{e^{-3}\pi}{6}\right] = \frac{e^{-3}\pi}{6}}$$

Pregunta 3 (13 puntos) Calcular el valor de

$$\oint_{|z|=4}\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)}$$

Donde la curva de integración se toma en sentido positivo.

<u>Solución</u>

Claramente, las singularidades de la función $f(z)$ son $z_0 = i$ y $z_1 = -3$. Además, ambas son polos de $f(z)$. Ya que,

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)} = \infty$$

$$\lim_{z\to z_1} f(z) = \lim_{z\to -3}\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)} = \infty$$

Además, $z_0 = i$ es un **polo de orden 2**. Mientras que $z_1 = -3$ es un **polo simple**.
Veamos también que

$$|z_0| = |i| = 1 < 4$$

$$|z_1| = |-3| = 3 < 4$$

Por lo tanto, ambas singularidades están dentro de la curva $|z| = 4$.
Ahora, por el teorema de los residuos sabemos que,

$$\oint_{|z|=4}\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)} = 2\pi i\sum_{k=1}^{N} Res(f(z); z_k) = 2\pi i[Res(f(z); i) + Res(f(z); -3)]$$

Entonces el problema se reduce a hallar los residuos en las singularidades de la función.
Así,

Para $z_0 = i$

$$Res(f(z);i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)}\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^3}{(z+3)}\right] =$$

$$\lim_{z\to i}\frac{3z^2(z+3)-z^3}{(z+3)^2} = \frac{3i^2(i+3)-i^3}{(i+3)^2} = -\frac{9+2i}{8+6i} = -\frac{21}{25}+\frac{19}{50}i$$

Para $z_1 = -3$

$$Res(f(z);-3) = \lim_{z\to -3}(z+3)\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)} = \lim_{z\to -3}\frac{z^3}{(z-i)^2} = -\frac{27}{8+6i} = -\frac{54}{25}+\frac{81}{50}i$$

Luego,

$$Res(f(z);i) + Res(f(z);-3) = \left(-\frac{21}{25}+\frac{19}{50}i\right)+\left(-\frac{54}{25}+\frac{81}{50}i\right) = -\frac{21+54}{25}+\frac{19+81}{50} = -3+2i$$

Finalmente,

$$\boxed{\oint_{|z|=4}\frac{z^3}{(z-i)^2(z+3)} = 2\pi i(-3+2i) = -(4+6i)\pi}$$

Este material ha sido creado para gecousb.com.ve

Solución y digitalización

Pablo Garrido
Estudiante de Ing. Electrónica
16-11296

Revisión

Joandriz González
Estudiante de Ing. de Materiales
16-10456

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas a mi correo **garridop3@hotmail.com**